6

Exercices sur le gradient stochastique

6.1 Optimisation avec recours

Énoncé.

On considère le problème de l'approvisionnement en eau d'un stock (un réservoir d'eau potable, par exemple) qui s'effectue en deux étapes :

– on choisit ≪ en aveugle ≫ une quantité q_1 à fournir, pour un coût égal à $\frac{1}{2}\, c_1 \left(q_1\right)^2$,
– on *observe* un prélèvement aléatoire d dans le stock,
– on fournit le complément $q_2 = d - q_1$, pour un coût $\frac{1}{2}\, c_2 \left(q_2\right)^2$.

Les coefficients c_1 et c_2 sont tous deux strictement positifs. Le but est de minimiser l'espérance du coût total.

Solution.

Le prélèvement correspond à une variable aléatoire $\boldsymbol{D}$, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour un aléa ω donné, les variables de décisions q_1 et q_2 sont liées par la relation : $q_1 + q_2 = \boldsymbol{D}(\omega)$, et le coût est : $\frac{1}{2}\, c_1 \left(q_1\right)^2 + \frac{1}{2}\, c_2 \left(q_2\right)^2$. Le problème d'optimisation est donc :

$$\min_{(q_1, q_2)} \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\left(c_1 \left(q_1\right)^2 + c_2 \left(q_2\right)^2\right) , \tag{6.1a}$$

sous la contrainte de prélèvement :

$$q_1 + q_2 = \boldsymbol{D}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \, . \tag{6.1b}$$

Pour achever de donner un sens au problème il faut préciser la nature mathématique de q_1 et de q_2. Tout d'abord, comme la variable q_1 est choisie *avant* que $\boldsymbol{D}(\omega)$ n'affecte le système, elle doit être identique pour toutes les valeurs de l'aléa. La décision q_1 est en *boucle ouverte* et l'on a donc $q_1 \in \mathbb{R}$. On remarque ensuite que l'unique contrainte du problème fournit la valeur de la seconde décision. Cette seconde décision s'adapte ainsi à chacune des valeurs que prend l'aléa et est en *boucle fermée* sur la demande $\boldsymbol{D}(\omega)$. Elle correspond donc à une variable aléatoire $\boldsymbol{Q}_2$ dont les valeurs sont directement imposées par les contraintes : $\boldsymbol{Q}_2(\omega) = \boldsymbol{D}(\omega) - q_1$, de telle sorte que le problème d'optimisation peut se réécrire en fonction de q_1 uniquement :

$$\min_{q_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}\Big(c_1 \left(q_1\right)^2 + c_2 \mathbb{E}\left(\left(\boldsymbol{D} - q_1\right)^2\right)\Big) . \tag{6.2}$$

La solution de ce problème peut être obtenue par diverses méthodes.

– La solution analytique s'obtient en développant l'expression du critère ci-dessus. Supposant que la variable aléatoire $\boldsymbol{D}$ est de carré intégrable, le problème se met sous la forme :

$$\min_{q_1 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}\Big(\left(c_1 + c_2\right)\left(q_1\right)^2 - 2c_2 q_1 \mathbb{E}\left(\boldsymbol{D}\right) + c_2 \mathbb{E}\left(\boldsymbol{D}^2\right)\Big) , \tag{6.3}$$

  et sa solution a donc pour expression :

$$q_1^\sharp = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \mathbb{E}\left(\boldsymbol{D}\right) . \tag{6.4}$$

  On remarquera que $q_1^\sharp \approx \mathbb{E}\left(\boldsymbol{D}\right)$ (resp. $q_1^\sharp \approx 0$) si $c_1 \ll c_2$ (resp. $c_1 \gg c_2$), ce qui correspond bien à l'intuition physique que l'on a du pilotage de ce stock : quand le « prix » c_1 est grand par rapport à c_2, on satisfait la contrainte de prélèvement en utilisant la décision q_2.

– La mise en œuvre de l'algorithme du gradient stochastique, à partir d'une valeur $q_1^{(0)}$ initiale, et avec le choix de la σ-suite de terme général : $\epsilon^{(k)} = 1/k$, conduit au calcul itératif suivant :

$$\boldsymbol{Q}_1^{(k+1)} = \boldsymbol{Q}_1^{(k)} - \frac{1}{k}\left((c_1 + c_2)\boldsymbol{Q}_1^{(k)} - c_2 \boldsymbol{D}^{(k+1)}\right) . \tag{6.5}$$

  On peut alors mettre en œuvre cet algorithme sur un ordinateur, en choisissant des valeurs particulières pour les coefficients c_1 et c_2, et en choisissant la loi de la variable aléatoire $\boldsymbol{D}$. On donne ci-dessous un programme (en Scilab) permettant de calculer la solution. Quelques exécutions de l'algorithme sont représentées sur la figure 6.1.

Algorithme du gradient stochastique (Scilab).

```
//
// ------------------------------------
// Algorithme du gradient stochastique
// ------------------------------------
//
// Generateur aleatoire gaussien
//
```

```
   rand('normal');
   rand('seed',123);
//
//  Moyenne et ecart-type de la demande
//
   moy = 10.;
   ect = 5.;
//
// Coefficients du critere
//
   c1 = 3.;
   c2 = 1.;
//
// Valeur initiale de la variable
//
   q1 = 0.;
//
// Initialisation des trajectoires
//
   x = 0.;
   y = q1;
//
// Iterations de gradient
//
   for k = 1:500
      dm = moy + (ect*rand(1));
      gr = ((c1+c2)*q1) - (c2*dm);
      q1 = q1 - (gr/k);
//
      x = [x ; k];
      y = [y ; q1];
   end
//
// Affichage des trajectoires
//
   plot2d(x,y);
   xtitle('Algorithme de gradient stochastique','Iter.','Q1');
```

Remarque 6.1. Ce problème que l'on vient d'étudier est la version la plus élémentaire de ce que l'on appelle **optimisation avec recours**. Dans un problème de ce type, on choisit une première décision en boucle ouverte, ce qui engendre un coût. À la suite de cette décision, un aléa affecte le système et on a alors la possibilité d'appliquer une seconde décision permettant de corriger les effets de l'aléa (d'où le terme de « recours »). Cette seconde décision a elle aussi un coût, et on cherche à minimiser l'espérance du coût total. Un grand nombre de problèmes dans l'industrie sont de cette nature. On en verra un exemple plus complexe dans l'exercice suivant.

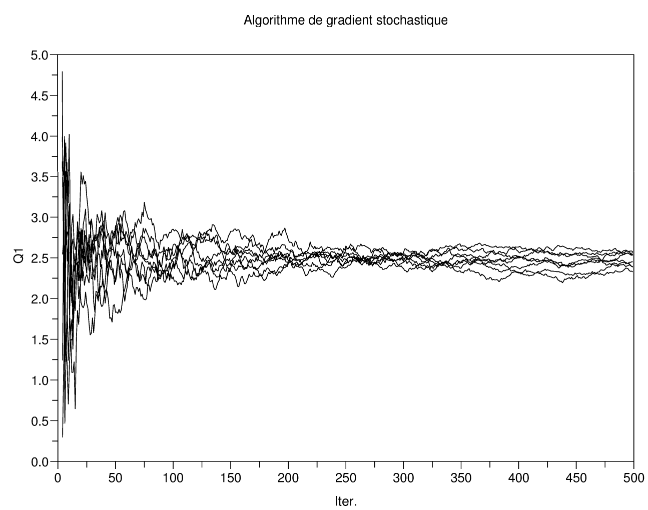

Fig. 6.1. Réalisations de l'algorithme du gradient stochastique ($q_1^\sharp = 2.5$).

6.2 Compromis entre investissement et fonctionnement

Description du problème.

Une entreprise de production et de distribution d'énergie dispose de N unités de production. On suppose que l'on est en présence d'un "grand système", le nombre d'unités N étant de l'ordre de 50.

Sur chaque unité i, on a la possibilité d'investir afin d'améliorer son fonctionnement. La variable permettant de contrôler l'investissement sur l'unité i est notée $u_i \in \mathbb{R}$, le coût associé est noté $I_i(u_i)$, si bien que le coût de l'investissement sur l'ensemble des unités est :

$$\sum_{i=1}^{N} I_i(u_i) \; . \tag{6.6}$$

Les investissements sur l'ensemble des unités sont soumis à des contraintes, modélisées, à l'aide d'une fonction $\Theta \; : \; \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$, par la relation :

$$\Theta(u_1, \ldots, u_N) \leq 0 \; . \tag{6.7}$$

L'ensemble des unités doit fournir une production égale à une demande en énergie $d \in \mathbb{R}$, qui est une donnée du problème. À investissement u_i donné, le fonctionnement de l'unité i dépend :

- d'une part d'un aléa $w_i \in \mathbb{W}_i$ indiquant la disponibilité de l'unité ; on suppose que les aléas de 2 unités distinctes sont *indépendants* et que l'ensemble $\mathbb{W}_i$ est discret, contenant les 3 valeurs :
  - $w_{i,a} = 0$: unité en panne (probabilité $\pi_{i,a}$),
  - $w_{i,b} = \frac{1}{2}$: unité partiellement disponible (probabilité $\pi_{i,b}$),
  - $w_{i,c} = 1$: unité opérationnelle (probabilité $\pi_{i,c} = 1 - \pi_{i,a} - \pi_{i,b}$),

  et l'on suppose de plus que l'aléa w_i ne dépend pas du niveau d'investissement u_i ;
- d'autre part d'une variable $v_i \in \mathbb{R}$ de pilotage de l'unité, permettant de modifier le fonctionnement de cette dernière ; on suppose que le choix de la variable v_i est effectué *après* avoir eu connaissance de l'ensemble des valeurs $(w_1, \ldots, w_N)$ des aléas.

Le coût de fonctionnement de l'unité i et la production d'énergie associée sont notés $c_i(u_i, v_i, w_i)$ et $e_i(v_i, w_i)$ respectivement. On suppose que la variable de commande v_i est bornée supérieurement par une fonction φ_i dépendant de l'investissement u_i consenti sur l'unité. À investissements $(u_1, \ldots, u_N)$ donnés et après observation des aléas $(w_1, \ldots, w_N)$, le coût total de fonctionnement est donné par :

$$\sum_{i=1}^{N} c_i(u_i, v_i, w_i) \; . \tag{6.8}$$

Les contraintes associées à la production sont d'une part celle concernant la demande en énergie :

$$\sum_{i=1}^{N} e_i(v_i, w_i) - d = 0 \ , \tag{6.9a}$$

et d'autre part celles portant sur les limites du pilotage :

$$\forall i = 1, \ldots, N \ , \quad v_i \leq \varphi_i(u_i) \ . \tag{6.9b}$$

Le but du problème est de déterminer les valeurs des variables d'investissement $(u_1, \ldots, u_N)$ qui minimisent l'espérance du coût global du système, et de calculer ensuite, à ce niveau d'investissement, les valeurs optimales des variables de pilotage $(v_1, \ldots, v_N)$ face à des aléas $(w_1, \ldots, w_N)$ donnés. On note que, du point de vue de la structure d'information,

– les variables $(u_1, \ldots, u_N)$ sont choisies *avant* de connaître les aléas,
– les variables $(v_1, \ldots, v_N)$ sont choisies *après* observation des aléas.

Questions.

Q1. Écrire le critère et les contraintes du problème global d'optimisation associé à l'énoncé précédent, et indiquer à quels espaces appartiennent les variables par rapport auxquelles est faite l'optimisation. Peut-on y appliquer directement un algorithme de type gradient stochastique (réponse à justifier) ?

Q2. À investissements $(u_1, \ldots, u_N)$ et à aléas $(w_1, \ldots, w_N)$ fixés, extraire du problème global le sous-problème de l'optimisation du fonctionnement du système. On note $f^\sharp(u_1, \ldots, u_N, w_1, \ldots, w_N)$ la valeur du minimum de ce sous-problème, en tant que fonction des investissements et des aléas. Partant d'hypothèses « raisonnables » (à spécifier) sur les fonctions c_i, e_i et φ_i, quelles sont les propriétés de convexité et de différentiabilité de la fonction $f^\sharp$?

Q3. Reformuler le problème global à l'aide de la fonction $f^\sharp$. Peut-on appliquer à ce nouveau problème un algorithme de type gradient stochastique (réponse à justifier) ?

Q4. Négligeant d'éventuels couplages entre les investissements des différentes unités, on considère la forme simplifiée suivante des contraintes (6.7) :

$$\forall i = 1, \ldots, N \ , \quad \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \ . \tag{6.10}$$

Écrire de manière détaillée l'algorithme de gradient stochastique généralisé que l'on obtient en choisissant pour fonction auxiliaire :

$$K(u_1, \ldots, u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (u_i)^2 \ , \tag{6.11}$$

et en considérant que (6.10) sont des contraintes d'appartenance à un ensemble admissible :

$$U^{\mathrm{ad}} = \prod_{i=1}^{N} [\underline{u}_i, \overline{u}_i] \ , \tag{6.12}$$

sur lequel on peut effectuer une opération de projection.

Q5. On revient au cas général des contraintes (6.7). Écrire les algorithmes de gradient stochastique sous contraintes explicites que l'on obtient pour différents choix de fonctions auxiliaires K (que l'on proposera et commentera).

Réponses.

R1. Afin de poser correctement le problème, il faut connaître sa structure d'information.

- Chaque aléa w_i correspond à une variable aléatoire $\boldsymbol{W}_i$ définie sur un espace de probabilité arbitraire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{W}_i$. On suppose que l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est « assez gros » pour que les N variables aléatoires $\boldsymbol{W}_i$ soient indépendantes. La variable aléatoire globale affectant le système considéré est alors $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_N)$, et prend ses valeurs dans l'espace $\mathbb{W}_1 \times \ldots \times \mathbb{W}_N$. Une réalisation $w = \boldsymbol{W}(\omega)$ de cette variable correspond à une réalisation $(w_1, \ldots, w_N)$ des variables aléatoires initiales, avec $w_i = \boldsymbol{W}_i(\omega)$.
- La commande d'investissement $u = (u_1, \ldots, u_N)$ ne dépend pas de la valeur prise par l'aléa w_i : l'optimisation par rapport à la variable u se fait dans l'espace $\mathbb{R}^N$.
- La commande de fonctionnement $v = (v_1, \ldots, v_N)$ est choisie en connaissant l'ensemble des aléas $(w_1, \ldots, w_N)$ affectant le système : c'est pourquoi l'optimisation par rapport à cette variable se fait dans un espace de fonctions définies sur $\mathbb{W}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, que l'on note $\mathcal{L}^N$:

$$\mathcal{L}^N = \big\{ v \ : \ \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}^N \big\} \ .$$

On notera que chaque composante v_i de la commande de fonctionnement v est définie sur $\mathbb{W}$ tout entier et non sur $\mathbb{W}_i$ seul : la décision v_i se fait en connaissant les aléas sur l'ensemble du système.

Le problème de l'optimisation du compromis entre investissement et fonctionnement s'écrit alors :

$$\min_{(u \in \mathbb{R}^N, v \in \mathcal{L}^N)} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N} \Big(I_i(u_i) + c_i(u_i, v_i(\boldsymbol{W}), \boldsymbol{W}_i) \Big) \right) \ , \tag{6.13a}$$

sous les contraintes :

$$\Theta(u_1, \ldots, u_N) \leq 0 \ , \tag{6.13b}$$

$$\sum_{i=1}^{N} e_i(v_i(\boldsymbol{W}), \boldsymbol{W}_i) - d = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \ , \tag{6.13c}$$

$$v_i(\boldsymbol{W}) - \varphi_i(u_i) \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et } \forall i = 1, \ldots, N \ . \tag{6.13d}$$

Du point de vue « grand système »,
– l'ensemble $\mathbb{W}$ est discret, de cardinal $3^{50} \approx 7.2\ 10^{23}$.
– les variables réelles à optimiser sont les N composantes du vecteur u, nombre auquel il faut ajouter les $N \times \text{card}(\mathbb{W})$ paramètres réels caractérisant la fonction v,
– le nombre total de contraintes à prendre en compte dans le problème d'optimisation est $p + \text{card}(\mathbb{W}) + N \times \text{card}(\mathbb{W})$.

Ces dimensions sont colossales. Le problème ne peut donc pas être traité de manière directe.

Du point de vue « stochastique », la méthode du gradient stochastique ne peut pas être utilisée sur l'ensemble du problème, puisque les variables v d'optimisation correspondent à des fonctions de la variable aléatoire $\boldsymbol{W}$ (commandes en boucle fermée), alors que le gradient stochastique ne sait a priori traiter que des commandes en boucle ouverte (comme le sont les variables u du problème).

On va s'intéresser, dans un premier temps, à la détermination des seules variables d'investissement optimales $u^\sharp$. Une fois ces valeurs optimales obtenues, on cherchera à calculer, pour une réalisation w donnée des aléas, les valeurs optimales $v^\sharp(w)$ des variables de fonctionnement du système.

R2. Dans la mesure où la variable u ne dépend pas des aléas affectant le système, on peut sortir les fonctions I_i de l'espérance. De plus, comme ces fonctions ne dépendent pas de v, on peut les sortir de la minimisation en v. Le problème d'optimisation se met donc sous la forme :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^{N} I_i(u_i) + \min_{v \in \mathcal{L}^N} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N} c_i(u_i, v_i(\boldsymbol{W}), \boldsymbol{W}_i) \right) \right) \ , \tag{6.14}$$

sous l'ensemble des contraintes présentes dans la formulation (6.13). On s'intéresse alors à la minimisation interne en v de ce problème, en ne tenant compte que des deux dernières contraintes du problème (6.13) [1] :

$$\min_{v \in \mathcal{L}^N} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N} c_i(u_i, v_i(\boldsymbol{W}), \boldsymbol{W}_i) \right) \ , \tag{6.15a}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{N} e_i(v_i(\boldsymbol{W}), \boldsymbol{W}_i) - d = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \ , \tag{6.15b}$$

1. car la première contrainte de ce problème ne fait pas intervenir la fonction v

$$v_i(\boldsymbol{W}) - \varphi_i(u_i) \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et } \forall i = 1, \ldots, N \;, \tag{6.15c}$$

que l'on peut interpréter comme la minimisation de l'espérance du coût total de fonctionnement à investissement fixé. Puisque la minimisation se fait sur l'ensemble $\mathcal{L}^N$ des fonctions définies sur $\mathbb{W}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, on a droit à autant de valeurs pour la fonction v qu'il y a de valeurs de l'aléa w dans l'ensemble $\mathbb{W}$. Le critère du sous-problème (6.15) se présente comme une somme (l'espérance) faite sur les éléments w de $\mathbb{W}$ de coûts ne dépendant chacun que de la variable $v(w)$; les contraintes de ce problème, étant exprimées aléa par aléa, n'induisent aucun couplage entre ces variables $v(w)$. La minimisation de (6.15) peut donc être effectuée aléa par aléa [2]. Elle est équivalente à résoudre, pour *chaque* $w = (w_1, \ldots, w_N)$, le sous-problème *déterministe* :

$$\min_{(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} c_i(u_i, x_i, w_i) \;, \tag{6.16a}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{N} e_i(x_i, w_i) - d = 0 \;, \tag{6.16b}$$

$$x_i - \varphi_i(u_i) \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N \;. \tag{6.16c}$$

Le Lagrangien de ce dernier problème a pour expression :

$$L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{N} \Big(c_i(u_i, x_i, w_i) + \lambda e_i(x_i, w_i) + \mu_i(x_i - \varphi_i(u_i)) \Big) - \lambda d \;, \tag{6.17}$$

λ (resp. μ) étant le multiplicateur associé à la contrainte (6.16b) (resp. (6.16c)).

On suppose que les hypothèses assurant l'existence d'un point selle de ce Lagrangien sont vérifiées :

- convexité – continuité – coercivité des fonctions c_i par rapport aux x_i,
- linéarité des fonctions e_i par rapport aux x_i,
- condition de qualification des contraintes,

et l'on note $f^\sharp(u, w)$ la valeur optimale du critère du sous-problème (6.16). Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte convexité des fonctions c_i par rapport aux x_i, on peut garantir l'unicité de la valeur $x^\sharp$ des variables x réalisant ce minimum. Cette valeur unique $x^\sharp$ dépend à la fois de u et de w et elle sera donc notée :

$$x^\sharp = v^\sharp(u, w) \;.$$

Si l'on suppose de plus que la fonction c_i est *conjointement* convexe en (u_i, x_i), différentiable par rapport à u_i, et que la fonction φ_i est concave différentiable

2. Cette interversion des opérateurs d'espérance et de minimisation, induite par l'absence de couplage entre aléas dans le critère et les contraintes, est claire dans le cas d'un ensemble $\mathbb{W}$ de cardinal fini. Dans le cas général, le résultat existe encore, mais sa preuve est considérablement plus technique. On pourra consulter (Rockafellar et Wets, 1998, Ch. 14) pour plus de détails.

en u_i, alors la fonction $f^\sharp$ est convexe et sous-différentiable par rapport à u. Si l'on suppose enfin que le sous-problème (6.16) admet un point-selle unique, la fonction $f^\sharp(u,w)$ est différentiable par rapport à u, et l'on a :

$$\nabla_{u_i} f^\sharp(u,w) = \nabla_{u_i} c_i(u_i, v_i^\sharp(u,w), w_i) - \mu_i^\sharp(u,w)\nabla\varphi_i(u_i) \ , \tag{6.18}$$

expression dans laquelle $\mu_i^\sharp(u,w)$ est la valeur optimale du multiplicateur associé à la contrainte (6.16c), lequel dépend de u et w.

R3. Avec les notations de la question précédente, si l'on remplace le sous-problème de l'optimisation du fonctionnement à investissement et aléa fixé par son résultat, le problème global du compromis entre investissement et fonctionnement a pour expression :

$$\min_{u\in\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} I_i(u_i) + \mathbb{E}\left(f^\sharp(u,\boldsymbol{W})\right) \ , \tag{6.19a}$$

sous la contrainte :
$$\Theta(u_1,\ldots,u_N) \leq 0 \ . \tag{6.19b}$$

Sous cette nouvelle forme, le problème consiste donc à minimiser dans $\mathbb{R}^N$ l'espérance d'une fonction sous une contrainte déterministe. On est donc exactement dans le cadre de l'extension de l'algorithme d'Arrow-Hurwicz au cas stochastique étudiée dans le cours. Il resterait bien évidemment à vérifier les hypothèses sous lesquelles un tel algorithme converge, mais on supposera que c'est le cas. Enfin, le calcul des dérivées de la fonction $f^\sharp$ effectué à la question précédente permet la mise en œuvre effective de l'algorithme, la dérivée par rapport à u_i de la fonction sous l'espérance dans le critère du problème (6.19) évalué au point $u^{(k)}$ pour un tirage $w^{(k+1)}$ des bruits étant :

$$\nabla I_i(u_i^{(k)}) + \nabla_{u_i} c_i(u_i^{(k)}, v_i^\sharp(u^{(k)}, w^{(k+1)}), w_i^{(k+1)}) - \mu_i^\sharp(u^{(k)}, w^{(k+1)})\nabla\varphi_i(u_i^{(k)}) \ .$$

R4. On note $U_i^{\mathrm{ad}} = [\underline{u}_i, \overline{u}_i]$. On utilise alors l'algorithme de gradient stochastique sans contraintes explicites, dont la mise en œuvre est réalisable en pratique dans la mesure où l'opération de projection sur l'ensemble U_i^{ad} est une opération simple. Le choix d'un noyau quadratique (en fait sphérique) conduit à chaque itération à résoudre un problème auxiliaire dont la solution se décompose suivant les N unités et peut être calculée explicitement. Partant d'un point $u^{(k)} \in U^{\mathrm{ad}}$, l'itération k de cet algorithme consiste à réaliser les opérations suivantes.

1. Tirer une réalisation $w^{(k+1)} = \left(w_1^{(k+1)}, \ldots, w_N^{(k+1)}\right)$ de la variable aléatoire $\boldsymbol{W}$ suivant sa loi de probabilité.
2. Résoudre le sous-problème déterministe (6.16) au point $u = u^{(k)}$ et pour des valeurs des bruits $w = w^{(k+1)}$. Cette résolution fournit :
   – $v^{(k+1)} = v^\sharp(u^{(k)}, w^{(k+1)})$: commande optimale du problème (6.16),

– $\mu^{(k+1)} = \mu_i^\sharp(u^{(k)}, w^{(k+1)})$: multiplicateur optimal associé à (6.16c).

3. Mettre à jour chaque composante u_i de u par la formule de gradient :

$$u_i^{(k+1)} = \mathrm{proj}_{U_i^{\mathrm{ad}}}\Big(u_i^{(k)} - \epsilon^{(k)}\Big(\nabla I_i(u_i^{(k)}) + \nabla_{u_i} c_i(u_i^{(k)}, v_i^{(k+1)}, w_i^{(k+1)}) - \mu_i^{(k+1)} \nabla\varphi_i(u_i^{(k)})\Big)\Big) \ ,$$

la projection sur U_i^{ad} consistant à prendre d'abord le min du terme entre parenthèses de l'expression précédente et de la valeur $\overline{u}_i$, puis le max du résultat obtenu et de $\underline{u}_i$.

R5. On revient à la notation plus compacte utilisant la fonction $f^\sharp$. On utilise le même noyau de décomposition qu'à la question précédente, et on suppose la fonction Θ différentiable. Partant du point $u^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ et du multiplicateur $p^{(k)} \geq 0$ associé à la contrainte (6.13b), et ayant effectué un tirage $w^{(k+1)}$ de l'aléa, l'itération k de l'algorithme de gradient stochastique généralisé se décompose suivant les composantes de u et s'écrit :

1. Résoudre le sous-problème (6.16) au point $u = u^{(k)}$ et pour le tirage de l'aléa $w = w^{(k+1)}$. On note $f^\sharp(u^{(k)}, w^{(k+1)})$ la valeur optimale obtenue.
2. Mettre à jour les composantes u_i de la variable u par :

$$u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)} - \epsilon^{(k)}\Big(\nabla I_i(u_i^{(k)}) + \nabla_{u_i} f^\sharp(u^{(k)}, w^{(k+1)}) + \big[\Theta'_{u_i}(u^{(k)})\big]^\top \cdot p^{(k)}\Big) \ .$$

3. Mettre à jour la variable p par la relation :

$$p^{(k+1)} = \max\Big\{0, p^{(k)} + \epsilon^{(k)}\Theta(u^{(k+1)})\Big\} \ .$$